ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2023–2024

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κλπ. Όσον αφορά στις προτεινόμενες δραστηριότητες, επαφίεται στην κρίση του/της διδάσκοντα/-σκουσας η επιλογή εκείνων που θα εφαρμόσει στην τάξη. Ωστόσο, προτείνεται να εμπλουτιστεί το μάθημα με το συγκεκριμένο υλικό.

Στο πλαίσιο του διδακτικού σχεδιασμού οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να αξιοποιήσουν τις προτεινόμενες **ιστοσελίδες** από το διδακτικό υλικό ή/και τα διδακτικά βιβλία, να προβαίνουν σε επανέλεγχο της εγκυρότητάς τους, διότι ενδέχεται λόγω του δυναμικού τους χαρακτήρα ορισμένες από αυτές να είναι ανενεργές ή να οδηγούν σε διαφορετικό περιεχόμενο.

Κεφάλαιο 1ο

(Προτείνεται να διατεθούν 24 διδακτικές ώρες).

Στην τάξη αυτή οι μαθητές/-ήτριες θα ασχοληθούν με τις έννοιες και τον λογισμό των διανυσμάτων. Αυτά αποτελούν απαραίτητες γνώσεις προκειμένου να γίνει κατανοητή η θεμελίωση της Αναλυτικής Γεωμετρίας του επιπέδου που ακολουθεί, καθώς και η αντιμετώπιση πολλών καταστάσεων της πραγματικής ζωής και προβλημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Εστίαση σε σημαντικές ιδέες στο κεφάλαιο των διανυσμάτων

Το διάνυσμα αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα έννοιας που δομήθηκε από τη στενή αλληλεπίδραση Μαθηματικών και Φυσικής.

Ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων. Σε κάθε περίπτωση, η σύνδεση των αλγεβρικών ή άλλων συμβολικών εκφράσεων με το αντίστοιχο σχήμα έχει κεντρική σημασία στην κατανόηση των εννοιών και των διαδικασιών. Προτείνεται λοιπόν, όποτε είναι δυνατόν, η συζήτηση των εννοιών, των ιδιοτήτων και των ασκήσεων να γίνεται σε άμεση αναφορά με το σχήμα και όχι μόνο στην αφηρημένη αλγεβρική μορφή τους.

Τα διανύσματα (όπως και οι εξισώσεις γραμμών) αξιοποιούνται στην απόδειξη προτάσεων και Θεωρημάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

§ 1.1 , 1.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 και 4 ώρες αντίστοιχα

Το διάνυσμα εισάγεται ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό, παρουσιάζονται με τη βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας και τονίζεται ιδιαίτερα ότι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφτεί ως διαφορά $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, όπου Ο είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου.

§ 1.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη χρήση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης παραλληλίας δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ $(\vec{\beta}\neq\vec{0})$ για την απόδειξη της συγγραμμικότητας τριών σημείων.

Επειδή αρκετοί/ές μαθητές/-ήτριες αντιλαμβάνονται τον τύπο $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ ως διαίρεση διανύσματος με αριθμό, καλό είναι να τονισθεί ότι η γραφή αυτή είναι μία σύμβαση και στην πραγματικότητα το 2ο μέλος είναι ο γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, δηλαδή $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Προτείνεται να γίνουν ασκήσεις μόνο από την Α΄ ομάδα.

§ 1.4 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι ένα διάνυσμα μπορεί να αναπαρίσταται με διαφορετικούς τρόπους. Ως προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα (γεωμετρική αναπαράσταση) και ως αλγεβρικό αντικείμενο με τη βοήθεια συντεταγμένων. Προτείνεται να τονισθεί επίσης η μοναδικότητα της έκφρασης διανύσματος με τις συντεταγμένες του. Η έννοια των διανυσμάτων είναι σημαντική στη γεωμετρία εάν αναλογιστεί κανείς ότι η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών οδηγεί στην «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Για αυτόν τον λόγο προτείνεται να δοθεί έμφαση στη σύνδεση των εννοιών και διαδικασιών που περιέχονται στις προηγούμενες παραγράφους με την αναλυτική (αλγεβρική) έκφρασή τους, με άμεση όμως αναφορά στη γεωμετρική έκφραση, όπου είναι δυνατόν.

§1.5 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Η πράξη του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων αφενός συνδέεται με έννοιες της Φυσικής, αφετέρου παρέχει επιπλέον εργαλεία ελέγχου της καθετότητας, της παραλληλίας κλπ. Ωστόσο, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι μια πράξη με αρκετές ιδιότητες με τις οποίες οι μαθήτριες/-ητές δεν είναι εξοικειωμένες/οι: το αποτέλεσμα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων δεν είναι διάνυσμα, το γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να είναι μηδέν ενώ κανένα από τα διανύσματα δεν είναι μηδενικό, δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, κ.α. Προτείνεται να συζητηθούν αναλυτικά αυτά τα χαρακτηριστικά, με αφορμή τόσο τους ορισμούς όσο και τις ασκήσεις.

Προτείνεται να μη γίνουν οι Γενικές Ασκήσεις αλλά να αξιοποιηθούν οι ερωτήσεις κατανόησης (ενδεικτικά οι 5, 6, 7, 10, 11, 12) για την ανάπτυξη της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών/-ητριών στην τάξη (διερεύνηση, συζήτηση, επιχειρηματολογία).

Προτεινόμενες Δραστηριότητες

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές δραστηριότητες που μπορούν να υλοποιηθούν στην τάξη με την εμπλοκή των μαθητών/-ητριών. Η πρώτη δραστηριότητα συνδέει τα Μαθηματικά με τη Φυσική. Η δεύτερη δραστηριότητα δίνει τη δυνατότητα στον/στην μαθητή/-ήτρια να συνδέει, διατυπώνει και αποδεικνύει προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τον διανυσματικό λογισμό, αλλά να ακολουθεί και την αντίστροφη πορεία. Τέλος, η τρίτη δραστηριότητα[1] αναφέρεται σε ένα πρόβλημα από τον πραγματικό κόσμο, όπου οι μαθητές/-ήτριες μοντελοποιούν το πρόβλημα με χρήση των διανυσμάτων και απαντούν στο τέλος με τη φυσική γλώσσα. Αν και είναι αυτονόητο,

[1] Η συγκεκριμένη δραστηριότητα έχει αλιευθεί από το βιβλίο: *THOMAS Απειροστικός λογισμός, Τόμος ΙΙ των Finney, Weir & Giordano*, σελ. 697, ΠΕΚ, Ηράκλειο 2011.

επισημαίνεται ότι αν ένα πρόβλημα απαιτεί τύπους ή σχέσεις από άλλο επιστημονικό πεδίο, αυτά δίνονται στους/στις μαθητές/-ήτριες.

Δραστηριότητα 1

Η δύναμη του διαγράμματος έχει μέτρο $F_P = 20N$ και σχηματίζει γωνία θ^o με το οριζόντιο έδαφος. Το βαγονάκι σύρεται 100m κατά μήκος του εδάφους.

α) Να υπολογίστε το έργο της δύναμης όταν η γωνία είναι 30^o.

β) Επιλέξτε δύο άλλες τιμές για τη γωνία θ^o και υπολογίστε το έργο σε κάθε περίπτωση. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μπορείτε να διατυπώσετε κάποια εικασία;

ΣΧΟΛΙΟ

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα στοχεύει να συνδέσει τα μαθηματικά με τη φυσική και εφαρμογές του πραγματικού κόσμου. Εστιάζει στο γεγονός ότι το έργο δεν είναι τίποτα άλλο, παρά το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών μεγεθών. Της δύναμης και της μετατόπισης.

Δραστηριότητα 2

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 + |\vec{\beta}|^2$.

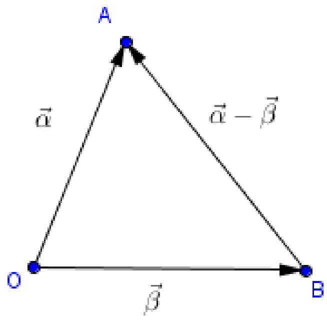
Να εξετάσετε αν η συγκεκριμένη σχέση ικανοποιείται για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου ή μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις.

Προσπαθήστε να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το προηγούμενο συμπέρασμά σας.

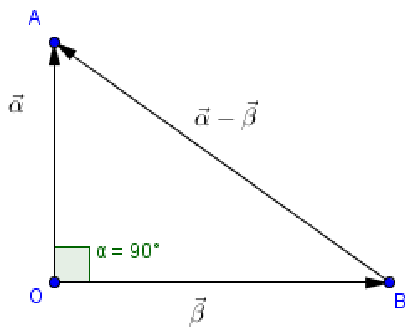
Ενδεικτική λύση

Η συγκεκριμένη δραστηριότητα συνδέει το διανυσματικό λογισμό με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στο πρώτο ερώτημα αναμένεται, οι μαθητές/-ήτριες να εφαρμόσουν τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και εργαζόμενοι, κυρίως αλγεβρικά, να καταλήξουν ότι η συγκεκριμένη σχέση ισχύει αν και μόνο αν τα διανύσματα είναι κάθετα.

Με το δεύτερο ερώτημα επιχειρείται να οπτικοποιήσουν οι μαθητές/-ήτριες τη δοθείσα σχέση. Έτσι, με σημείο αναφοράς το O θα κατασκευάζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, οπότε θα είναι $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Οι μαθητές/-ήτριες, στη συνέχεια, αναμένεται να ερμηνεύσουν τα μέτρα των διανυσμάτων ως μήκη ευθυγράμμων τμημάτων, οπότε τη σχέση $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2$ θα τη γράψουν στη μορφή: $(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2$, για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι ισχύει, αν και μόνο αν το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, δηλαδή αν και μόνο αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

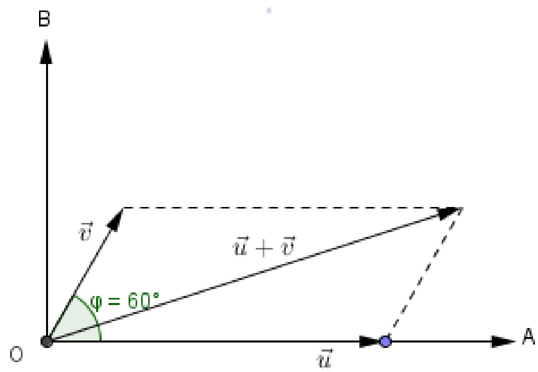


Δραστηριότητα 3

Ένα αεροσκάφος που πετά προς ανατολάς με ταχύτητα 500 km/h απουσία ανέμου, συναντά άνεμο ταχύτητας 70 km/h, που πνέει σε κατεύθυνση 60^0 ανατολική-βορειονατολική (οι κατευθύνσεις ορίζουν γωνία η οποία μετριέται από την πρώτη κατεύθυνση δηλ. την ανατολική, προς τη δεύτερη κατεύθυνση, δηλ τη βορειοανατολική). Το αεροπλάνο διατηρεί τον προσανατολισμό του προς ανατολάς, ωστόσο λόγω του ανέμου, η ταχύτητα του ως προς το έδαφος αποκτά νέο μέτρο και κατεύθυνση. Βρείτε τη νέα κατεύθυνση του αεροσκάφους.

Ενδεικτική λύση

Έστω $\vec{u}$ η ταχύτητα του αεροσκάφους πριν την επίδραση του ανέμου και $\vec{v}$ η ταχύτητα του ανέμου. Τότε έχουμε: $\left|\vec{u}\right|$=500 και $\left|\vec{v}\right|$= 70. Ζητείται το μέτρο και η φορά της συνισταμένης $\vec{u}+\vec{v}$. Υποθέτουμε ότι ο θετικός ημιάξονας των x δείχνει προς την Ανατολή και ο θετικός ημιάξονας των y προς τον Βορρά. Στο σύστημα αυτό το διάνυσμα $\vec{u}$ = (500, 0) και το



$\vec{v}=\left(70\sigma\upsilon\nu 60^0,\ 70\eta\mu 60^0\right)=\left(35,\ 35\sqrt{3}\right)$. Επομένως, $\vec{u}+\vec{v}=\left(535,\ 35\sqrt{3}\right)$ και συνεπώς

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|=\sqrt{535^2+\left(35\sqrt{3}\right)^2}\approx 538,4\ .$$

Επιπλέον, για τη γωνία θ που σχηματίζει η κατεύθυνση του αεροσκάφους με την ανατολική κατεύθυνση ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{35\sqrt{3}}{535}$ που αντιστοιχεί σε γωνία 6,5°.

Απάντηση: Η νέα ταχύτητα του αεροσκάφους θα είναι περίπου 538,4 km/h, ενώ η νέα πορεία του είναι περίπου $6,5^0$ ανατολική-βορειοανατολική.

Β΄ τρόπος
Μπορούμε να υπολογίσουμε το $|\vec{u}+\vec{v}|$ με χρήση του εσωτερικού τετραγώνου και τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{u}+\vec{v}$ με χρήση του εσωτερικού γινομένου.

Κεφάλαιο 2ο
(Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)

Εισαγωγή
Κατά τη φοίτηση τους στο Γυμνάσιο, οι μαθητές/-ήτριες έχουν έλθει ήδη σε επαφή με έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Στη Β΄ Λυκείου σκοπεύουμε σε περαιτέρω εμβάθυνση θεμελιωδών ζητημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια. Τονίζεται η σημασία του συντελεστή διεύθυνσης (κλίσης) μιας ευθείας, με τη βοήθεια του οποίου διατυπώνονται οι συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας δύο ευθειών. Επιπλέον, προσδιορίζονται οι διάφορες μορφές της εξίσωσης της ευθείας, η γενική της μορφή, καθώς και το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από ένα σημείο. Με τη διδασκαλία αυτής της ενότητας επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας, καθώς και να κατανοήσουν τις δυνατότητες που παρέχει ως μαθηματικό εργαλείο στη διερεύνηση και απόδειξη προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και σε περιοχές άλλων επιστημών.

§2.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες.
Προτείνεται να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορεί να εκφρασθεί ο συντελεστής διεύθυνσης ευθείας και στο ότι δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. Να τονισθεί επίσης, ότι από το σημείο $\mathrm{M}(x_0,\, y_0)$ διέρχονται οι ευθείες με εξισώσεις: $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ και $x=x_0$.

§2.2 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες
Να δοθεί έμφαση όχι μόνο στη γενική μορφή εξίσωσης ευθείας, αλλά και στη σχέση που υπάρχει μεταξύ των συντελεστών της εξίσωσης και των συντεταγμένων του διανύσματος που είναι παράλληλο ή κάθετο προς την ευθεία. Στην παράγραφο αυτή προτείνεται να συζητηθεί μια απόδειξη της διαδικασίας επίλυσης του γραμμικού συστήματος 2×2 με τη μέθοδο των οριζουσών, σε συνδυασμό με τη σχετική θέση δύο ευθειών στο επίπεδο. Επειδή δεν περιέχεται το σχετικό θέμα στο σχολικό βιβλίο, προτείνεται η παρακάτω διδακτική πορεία.
Ας είναι

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1\cdot x_1+\mathrm{B}_1\cdot y_1+\Gamma_1=0 \quad \text{με } \mathrm{A}_1\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_1\neq 0 \\ \mathrm{A}_2\cdot x_1+\mathrm{B}_2\cdot y_1+\Gamma_2=0 \quad \text{με } \mathrm{A}_2\neq 0 \text{ ή } \mathrm{B}_2\neq 0 \end{cases}$$

οι εξισώσεις δύο ευθειών ε_1 και ε_2 στο επίπεδο αντίστοιχα.
Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{cases} \mathrm{A}_1 \cdot x_1 + \mathrm{B}_1 \cdot y_1 = -\Gamma_1 \ \text{ με } \mathrm{A}_1 \neq 0 \ \acute{\eta} \ \mathrm{B}_1 \neq 0 \\ \\ \mathrm{A}_2 \cdot x_1 + \mathrm{B}_2 \cdot y_1 = -\Gamma_2 \ \text{ με } \mathrm{A}_2 \neq 0 \ \acute{\eta} \ \mathrm{B}_2 \neq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Τότε λέμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή αλλιώς ένα γραμμικό σύστημα (2×2).

Τα διανύσματα $\overrightarrow{\eta_1} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$ και $\overrightarrow{\eta_2} = (\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2)$ είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Επομένως, θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών.

Η ορίζουσα των διανυσμάτων $\overrightarrow{\eta_1}$ και $\overrightarrow{\eta_2}$, η $\det(\overrightarrow{\eta_1}, \overrightarrow{\eta_2}) = \begin{vmatrix} A_1 & \mathrm{B}_1 \\ A_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix}$, επειδή σχηματίζεται από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος (1), ονομάζεται ορίζουσα του συστήματος και συμβολίζεται με D, δηλαδή $D = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\eta_1} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1)$ και $\overrightarrow{\eta_2} = (\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2)$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε ισοδύναμα

$$\det(\overrightarrow{\eta_1}, \overrightarrow{\eta_2}) \neq 0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & \mathrm{B}_1 \\ A_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0 \ \ (2)$$

Επομένως, οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται. Το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).

Αν $D = 0$, τότε ισοδύναμα τα $\overrightarrow{\eta_1}$ και $\overrightarrow{\eta_2}$ είναι συγγραμμικά και επομένως, οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν $D = 0$, τότε το σύστημα (1) είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις αντίστοιχα.

Εναλλακτική προσέγγιση

Αντί των καθέτων διανυσμάτων, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\delta_1} = (\mathrm{B}_1, -\mathrm{A}_1)$ και $\overrightarrow{\delta_2} = (\mathrm{B}_2, -\mathrm{A}_2)$ που είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Τότε τα διανύσματα θα προσδιορίζουν και τη σχετική θέση των ευθειών αυτών. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\delta_1} = (\mathrm{B}_1, -\mathrm{A}_1)$ και $\overrightarrow{\delta_2} = (\mathrm{B}_2, -\mathrm{A}_2)$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε

$$\det(\overrightarrow{\delta_1}, \overrightarrow{\delta_2}) \neq 0 \ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathrm{B}_1 & -A_1 \\ \mathrm{B}_2 & -A_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -\mathrm{B}_1 A_2 + A_1 \mathrm{B}_2 \neq 0$$

Η τελευταία σχέση γράφεται και $D = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (2). Η συγκεκριμένη ορίζουσα που αποτελείται από τους συντελεστές των αγνώστων του συστήματος, λέγεται ορίζουσα του συστήματος. Η σχέση

(2) σημαίνει ισοδύναμα ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες τη μοναδική λύση του συστήματος (1).

Όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα, τότε

$$\det(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mathrm{B}_1 & -\mathrm{A}_1 \\ \mathrm{B}_2 & -\mathrm{A}_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{D} = 0$$

Αφού τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (\mathrm{B}_1, -\mathrm{A}_1)$ και $\vec{\delta}_2 = (\mathrm{B}_2, -\mathrm{A}_2)$ είναι παράλληλα, τότε και οι αντίστοιχες ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Να τονιστεί ότι η έννοια της παραλληλίας νοείται υπό την αναλυτική της έκφραση. Δηλαδή, οι ευθείες είτε δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, είτε ταυτίζονται και έχουν άπειρα κοινά σημεία. Επομένως, όταν $D = 0$, τότε το σύστημα είτε είναι αδύνατο, είτε έχει άπειρες λύσεις.

ΣΧΟΛΙΟ

Προαιρετικά ο/η διδάσκων/-σκουσα θα μπορούσε, με τη βοήθεια των οριζουσών, να προχωρήσει στη διερεύνηση των συνθηκών κάτω από τις οποίες οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή συμπίπτουν.

Για παράδειγμα: Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν έναν τουλάχιστον από τους άξονες. Έστω ότι τέμνουν τον $y'y$. Τότε, η ε_1 τον τέμνει στο σημείο με τεταγμένη $-\dfrac{\Gamma_1}{\mathrm{B}_1}$ και η ε_2 στο σημείο με τεταγμένη $-\dfrac{\Gamma_2}{\mathrm{B}_2}$. Στην περίπτωση αυτή, οι ευθείες ε_1 και ε_2 :

Συμπίπτουν αν και μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{\mathrm{B}_1} = \frac{\Gamma_2}{\mathrm{B}_2} \Leftrightarrow \Gamma_1\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_1\Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_1\Gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \mathrm{B}_1 \\ \Gamma_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow D_x = 0$$

όπου $D_x = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \mathrm{B}_1 \\ \Gamma_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix}$. Η ορίζουσα D_x προκύπτει από την ορίζουσα D, αν η στήλη των συντελεστών του x αντικατασταθεί από τους σταθερούς όρους του συστήματος (1). Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η ορίζουσα $D_y = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \Gamma_1 \\ \mathrm{A}_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$, για την οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι $D_y = 0$. Να σημειωθεί ότι σε όλες τις περιπτώσεις υπάρχει συντελεστής αγνώστου διαφορετικός από το μηδέν.

Δεν έχουν κανένα κοινό σημείο αν και μόνον αν

$$\frac{\Gamma_1}{\mathrm{B}_1} \neq \frac{\Gamma_2}{\mathrm{B}_2} \Leftrightarrow \Gamma_1\mathrm{B}_2 \neq \mathrm{B}_1\Gamma_2 \Leftrightarrow \Gamma_1\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_1\Gamma_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \mathrm{B}_1 \\ \Gamma_2 & \mathrm{B}_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow D_x \neq 0$$

Συμπερασματικά:

ΟΡΙΖΟΥΣΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ	ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
$D \neq 0$	Οι ευθείες τέμνονται (μοναδικό κοινό σημείο)	Μοναδική λύση $x = \frac{D_x}{D}$ και $y = \frac{D_y}{D}$
$D = 0$	Οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο ή Οι ευθείες συμπίπτουν (άπειρα κοινά σημεία)	Αδύνατο ή Άπειρες λύσεις

Προτείνεται να δοθεί έμφαση με απλά αριθμητικά παραδείγματα ότι στην περίπτωση όπου οι συντελεστές A_1, B_2, A_2, B_1 δεν είναι μηδέν η συνθήκη $D = A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ δηλώνει ότι οι συντελεστές είναι ανάλογοι και οι ευθείες έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης, ενώ οι ορίζουσες D_x, D_y καθορίζουν αν η αναλογία ισχύει και για τους συντελεστές Γ_1, Γ_2, οπότε οι ευθείες ταυτίζονται, ή δεν ισχύει οπότε οι ευθείες είναι παράλληλες. Για τον σκοπό αυτό μπορούν να αξιοποιηθούν οι ασκήσεις 5, 6 της Α' Ομάδας και 6, 7 και 8 της Β' Ομάδας της παραγράφου 1.1 του βιβλίου της Άλγεβρας.
Προτείνεται επίσης να διδαχθούν ασκήσεις παραμετρικών συστημάτων από το βιβλίο της Άλγεβρας Β΄ Λυκείου υπό το πρίσμα της σχετικής θέσης δύο ευθειών.
Η διδακτική πορεία που θα επιλεγεί δεν θα είναι στην εξεταστέα ύλη. Οι μαθητές/-ήτριες όμως πρέπει να γνωρίζουν και να χρησιμοποιούν σε ασκήσεις τα συμπεράσματα του παραπάνω πίνακα.

§2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες
Πριν δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου, οι μαθητές/-ήτριες να επεξεργαστούν δραστηριότητες, όπως οι παρακάτω δύο:
1η: Δίνονται η ευθεία και το σημείο Α(5, 2). Να βρεθούν:

i) Η εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ε .
ii) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής της ζ με την ε.
iii) Η απόσταση του Α από την ε.

Στη συνέχεια, να συζητηθεί ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος απόστασης ενός σημείου από μία ευθεία, ο οποίος και να δοθεί.
2η: Δίνονται τα σημεία Α(5, 2), Β(2, 3) και Γ(3, 4). Να βρεθούν:

i) Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ .
ii) Το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ και
iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Στη συνέχεια, να συζητηθεί ότι με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ο τύπος του εμβαδού τριγώνου του οποίου είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών.
Β) Να μη γίνουν:

- Η άσκηση 7 της Β΄ Ομάδας.
- Από τις Γενικές Ασκήσεις οι 3, 4, 5, 6 και 7.

Προτεινόμενες Δραστηριότητες σε όλο το κεφάλαιο

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικές δραστηριότητες που μπορούμε να υλοποιήσουμε στην τάξη με την εμπλοκή των μαθητών/-ητριών.

<u>Δραστηριότητα 1</u>
Να συμπληρώσετε τα κενά στον παρακάτω πίνακα

		Κλίση ευθείας	**Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος**	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
Γωνία ευθείας με τον άξονα $x'x$	$\omega=30^0$			
	$\omega=60^0$			
	$\omega=150^0$			
Διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία	$\vec{\delta}=(3,\sqrt{3})$			
	$\vec{\delta}=(-1,-\sqrt{3})$			
	$\vec{\delta}=(-3,\sqrt{3})$			
Σημεία της ευθείας	$(0,1)$ **και** $(\sqrt{3},2)$			
	$(1,\sqrt{3}-1)$ **και** $(\sqrt{3},2)$			
	$(0,2)$ **και** $(-\sqrt{3},3)$			

Οι μαθήτριες/-ητές καλούνται να συμπληρώσουν τα κενά και να συνδέσουν έτσι την κλίση της ευθείας, τον συντελεστή διεύθυνσης του παράλληλου διανύσματος και το πηλίκο διαφορών $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Αναμένεται να παρατηρήσουν ότι οι τιμές των τριών μεγεθών ταυτίζονται και κατά συνέπεια εκφράζουν την ίδια μαθηματική έννοια.

<u>Δραστηριότητα 2</u>
Θεωρούμε τις ευθείες με εξισώσεις:

$$(1-\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})y=8 \quad (\varepsilon_1)$$
$$x+\sqrt{3}y=1 \quad (\varepsilon_2)$$

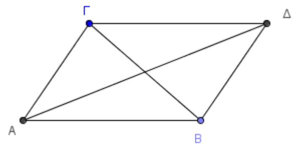
α) Να προσδιορίσετε δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ που να είναι κάθετα στις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα και να βρείτε τα μέτρα τους.

β) Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες μεταξύ τους.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών.

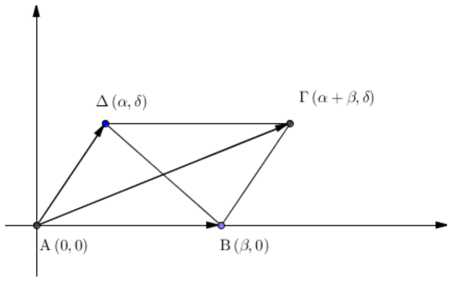
<u>Δραστηριότητα 3 (Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος με άλγεβρα)</u>

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.



Ενδεικτική λύση

Το ζητούμενο αποτελεί μία από τις βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Αυτό που θέλουμε όμως τώρα, είναι να την αποδείξουμε με χρήση της άλγεβρας. Επιλέγουμε λοιπόν ένα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Η καταλληλότητα έχει να κάνει με τη χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων αγνώστων. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε το διπλανό σχήμα με τους άξονες. Θεωρώντας το σημείο $\mathrm{A}(0,0)$ ως αρχή των αξόνων, το σημείο $\mathrm{B}(\beta,0)$ και το σημείο $\Delta(\alpha,\delta)$. Τότε $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}=(\alpha+\beta,\ \delta)$, οπότε το σημείο Γ έχει τις ίδιες συντεταγμένες. Άμεσα προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του μέσου του τμήματος ΑΓ είναι $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\delta}{2}\right)$ όπως ακριβώς συμβαίνει και με τις συντεταγμένες του μέσου του ΒΔ. Επομένως, οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.



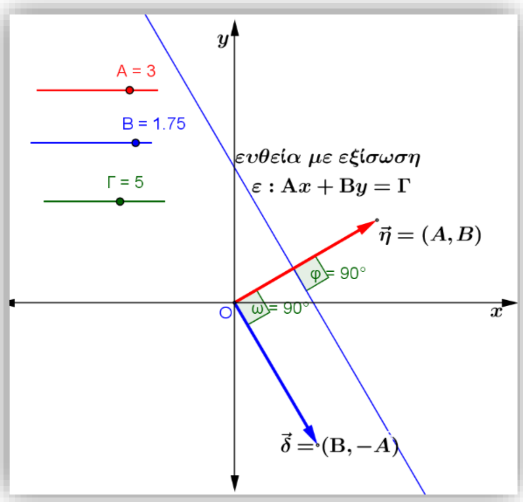
<u>Δραστηριότητα 4</u>

Με τη χρήση του λογισμικού GeoGebra να επιλέξετε τρεις δρομείς Α, Β, Γ και να παραστήσετε γραφικά τα διανύσματα $\vec{n}=(\mathrm{A},\mathrm{B})$ και $\vec{\delta}=(\mathrm{B},-\mathrm{A})$, καθώς και την ευθεία *ε* με εξίσωση $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=\Gamma$. Να υπολογίσετε επιπλέον το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{\delta}$, καθώς και το μέτρο της γωνίας που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{n}$ με την ευθεία *ε* και, στη συνέχεια, να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

Ποια είναι η σχέση των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{\delta}$, τόσο μεταξύ τους, όσο και με την ευθεία *ε*, όταν μεταβάλλουμε το Α ή το Β;

Πώς κινείται η ευθεία ε, όταν μεταβάλλουμε μόνο το Α ή μόνο το Β ή μόνο το Γ; Για να απαντήσετε στο ερώτημα αυτό ενεργοποιείστε το ίχνος της ευθείας ε και μεταβάλλετε διαδοχικά τους δρομείς Α, Β, Γ, αφού προηγουμένως διατηρήσετε στην επιφάνεια εργασίας μόνο την ευθεία και τους δρομείς και αποκρύψετε όλα τα υπόλοιπα (βλέπε παρακάτω σχήμα).

Αποδείξτε τον προηγούμενο ισχυρισμό σας.



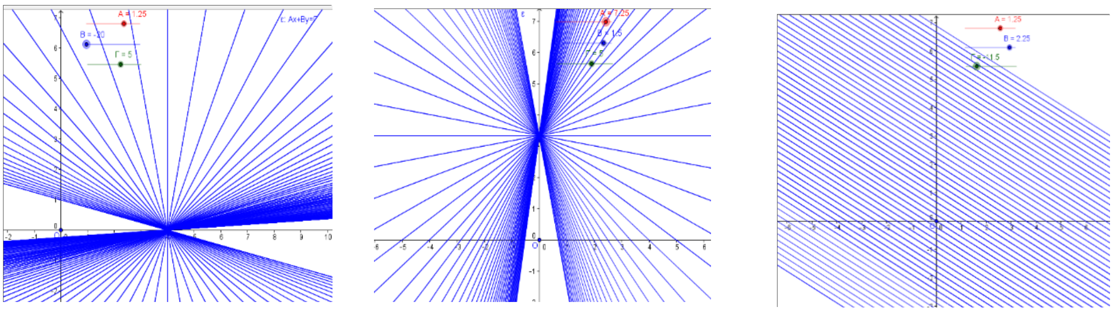
<u>Δραστηριότητα 5</u>

Δίνεται η παρακάτω οικογένεια γραμμικών εξισώσεων:

$$\varepsilon_\lambda : \left(\lambda^2 - \lambda\right) \cdot x - \lambda \cdot y = \lambda^2 - 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Με το λογισμικό geogebra επιλέξτε ένα δρομέα λ που να παίρνει τιμές από – 20 έως 20 με αύξηση 0,2 και παριστάνετε γραφικά την ε_λ.

i) Μετακινήστε τον δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και απαντήστε στο ερώτημα: «Τι παριστάνει η ε_λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \neq 0$ και τί για λ = 0;» Αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.



ii) Πάρτε δύο τιμές του λ, για παράδειγμα λ = 1, λ = 2, παριστάνετε γραφικά τις ε_1 και ε_2, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Α και επιβεβαιώστε αλγεβρικά την απάντησή σας.

iii) Ενεργοποιήστε το ίχνος της ε_λ, μετακινήστε τον δρομέα για να μεταβάλλετε τις τιμές του λ και ελέγξτε αν οι ε_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται όλες από το σημείο Α. Επαληθεύσατε την εικασία σας αλγεβρικά.

Κεφάλαιο 3ο
(Προτείνεται να διατεθούν 28 διδακτικές ώρες)

Η μελέτη των κωνικών τομών αποτελεί μια φυσιολογική διδακτική εξέλιξη μετά τη μελέτη της ευθείας, που εκφράζεται με εξίσωση πρώτου βαθμού, αφού η αναλυτική τους έκφραση αντιστοιχεί σε εξισώσεις 2ου βαθμού. Κατά τη διδασκαλία του κεφαλαίου προτείνεται, να δοθεί έμφαση στα παρακάτω σημεία:

- Κάθε κωνική τομή είναι γεωμετρικός τόπος σημείων του επιπέδου τα οποία ικανοποιούν συγκεκριμένη κάθε φορά ιδιότητα.
- Ο τιμή της εκκεντρότητας καθορίζει τη μορφή της κωνικής τομής.
- Οι ιδιότητες των κωνικών τομών έχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές.

Από τις γενικές ασκήσεις του 3ου Κεφαλαίου <u>δεν θα διδαχθούν</u> ασκήσεις που αναφέρονται στις παραγράφους 3.2, 3.3. 3.4 (Παραβολή, Έλλειψη και Υπερβολή).

§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 10 ώρες

Να γίνει υπενθύμιση των βασικών ιδιοτήτων του κύκλου που έχουν γνωρίσει οι μαθητές/-ήτριες κατά τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Προτείνεται για την εύρεση της εξίσωσης του κύκλου να μην δοθεί έμφαση μόνο στην εφαρμογή του τύπου, αλλά και στην εύρεσή της με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου. Από τις ασκήσεις της Β' Ομάδας προτείνεται να συζητηθούν μόνο οι 6, 7 και 10.

§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Α) Πριν αποδειχθεί ο τύπος της εξίσωσης της παραβολής, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης παραβολής της οποίας δίνεται η εστία και η διευθετούσα. Για παράδειγμα, της παραβολής με εστία το σημείο Ε(1, 0) και διευθετούσα την ευθεία δ: x = – 1. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές/-ήτριες έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.

Β) Να μην αναλωθεί διδακτικός χρόνος σε ασκήσεις που απαιτούν υπερβολικά πολλές πράξεις. Από τις ασκήσεις της Β' Ομάδας προτείνεται να συζητηθούν μόνο οι 1, 2 και 3.

§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Α) Πριν αποδειχθεί ο τύπος της εξίσωσης της έλλειψης, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης έλλειψης της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα 2α. Για παράδειγμα, της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(– 4, 0), Ε(4, 0) και 2α = 10. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές/-ήτριες έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης

Β) Να μην αναλωθεί διδακτικός χρόνος σε ασκήσεις που απαιτούνται υπερβολικά πολλές πράξεις. Να μη συζητηθούν ασκήσεις της Β' Ομάδας.

§3.4 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Α) Πριν αποδειχθεί ο τύπος της εξίσωσης της υπερβολής, να λυθεί ένα πρόβλημα εύρεσης εξίσωσης υπερβολής της οποίας δίνονται οι εστίες και το σταθερό άθροισμα 2α. Για παράδειγμα, της υπερβολής με εστίες τα σημεία Ε΄(– 4, 0), Ε(4, 0) και 2α = 10. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές/-ήτριες έρχονται σε επαφή με τη βασική ιδέα της απόδειξης.

Β) Να μην αναλωθεί διδακτικός χρόνος σε ασκήσεις που απαιτούνται υπερβολικά πολλές πράξεις. Από τις ασκήσεις της Β' Ομάδας προτείνεται να συζητηθεί μόνο η 4 και μόνο για την υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$.

§3.5 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Από την παράγραφο αυτή θα διδαχθεί μόνο η υποπαράγραφος «Σχετική θέση ευθείας και κωνικής». Έτσι, οι μαθητές/-ήτριες θα γνωρίσουν την αλγεβρική ερμηνεία του γεωμετρικού ορισμού της εφαπτομένης των κωνικών τομών και γενικότερα της σχετικής θέσης ευθείας και κωνικής τομής. Προτείνεται η επίλυση απλών ασκήσεων, όπως είναι η άσκηση 4 της Α΄ ομάδας.

Προτεινόμενη δραστηριότητα

α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα που ακολουθεί με το αντίστοιχό του στη δεύτερη στήλη:

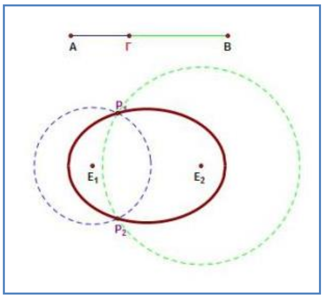
Εξίσωση	**Κωνική τομή**
$9x^2 - y^2 = 0$	Έλλειψη
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 6 = 0$	Υπερβολή
$y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$	Παραβολή
$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 4 = 0$	Ζεύγος ευθειών
$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$	Κύκλος

β. Όμοια για τον πίνακα:

Εκκεντρότητα	**Κωνική τομή**
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	Κύκλος
0	Ισοσκελής υπερβολή
$\frac{4}{5}$	Υπερβολή
$\frac{5}{4}$	Έλλειψη
$\sqrt{2}$	

Ενδεικτική ψηφιακή δραστηριότητα:

Η έννοια της έλλειψης προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με τη δραστηριότητα «Κατασκευή έλλειψης» από το Φωτόδεντρο. Με τη βοήθεια των οδηγιών και του λογισμικού, οι μαθητές/-ήτριες κατασκευάζουν τον γεωμετρικό τόπο ενός σημείου που το άθροισμα των αποστάσεών του από δύο σταθερά σημεία, είναι σταθερό. Μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά τη θέση των σταθερών σημείων, το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων του τρίτου σημείου από αυτά και να παρατηρούν κάθε φορά τη μεταβολή στον γεωμετρικό τόπο.



http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/6873